

如何暴力地求和

$n + e$

Tsinghua University

2016 年 12 月 5 日



- ① 试题大意
- ② 得分情况
- ③ 解题思路
- ④ 算法介绍



图: My Wechat

- 有一个多项式函数 $f(x)$ ，最高次幂为 x^m ，定义变换 Q :

$$Q(f) = \sum_{k=0}^n f(k) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

- 现在给定函数 f 和 n, x ，求 $Q(f) \bmod 998244353$ 。

- ① 试题大意
- ② 得分情况
- ③ 解题思路
- ④ 算法介绍

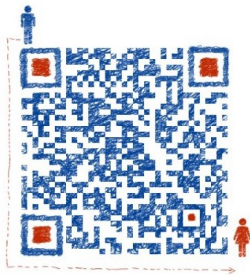
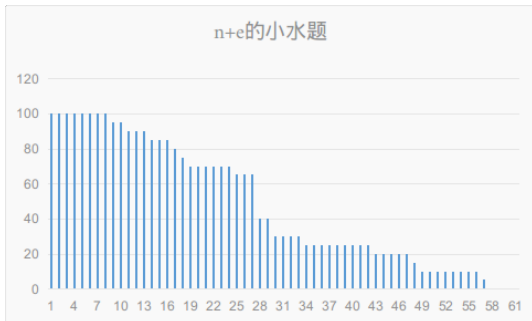


图: My Wechat

- 100分: 8人 (昨天半个场 AC 实在是太可怕了)
- 95分: 2人 (计划通)
- 90分: 3人 (计划通)
- 85分: 3人 (计划通)
- 65分以上: 27人
- 平均分: 47.7



- ① 试题大意
- ② 得分情况
- ③ 解题思路
- ④ 算法介绍



图: My Wechat

- 通过尝试可以发现答案是一个关于 n 和 x 的多项式，且最高次项为 m 。题目里面第二段已经给出相应的提示。
- 比如，当多项式函数为 $f: x \mapsto x^2$ 时，所要求的是

$$Q(x^2) = \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

- 如果推公式/找规律能力够强的话，这个表达式的答案是

$$n^2 x^2 - n x^2 + n x$$

- 此为 7 号点答案。

- 一种想法是，利用乘法分配律，将函数 f 的每一个项单独考虑，最后直接相加即可。
- 问题转化为，化简表达式

$$Q(x^c) = \sum_{k=0}^n k^c \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

其中 $c \in \{1, 2, \dots, m\}$ 。

- 不好化简？
- $Q(f)$ 有什么性质？

① 试题大意

② 得分情况

③ 解题思路

④ 算法介绍

算法一

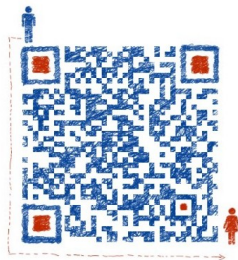
算法二

算法三

算法四

算法五

算法六？



图：My Wechat

① 试题大意

② 得分情况

③ 解题思路

④ 算法介绍

算法一

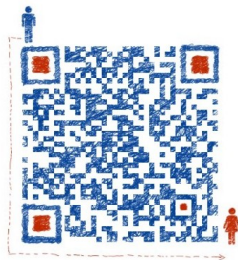
算法二

算法三

算法四

算法五

算法六？



图：My Wechat

- 对于 10% 的数据, $n, m \leq 1000$ 且 $n = m$

- 对于 10% 的数据, $n, m \leq 1000$ 且 $n = m$
- 考察 for 语句的使用、组合数的求法、快速幂的实现。

① 试题大意

② 得分情况

③ 解题思路

④ 算法介绍

算法一

算法二

算法三

算法四

算法五

算法六？



图：My Wechat

- 对于 20% 的数据, $n \leq 100000$

- 对于 20% 的数据， $n \leq 100000$
- 加上一个多项式插值就好了。剩下不变。
- 也许常数好的话可以拿 25 分？反正都开 O2 了
- 然而实际情况却是……？
- 有人拿部分分了。计划通！

① 试题大意

② 得分情况

③ 解题思路

④ 算法介绍

算法一

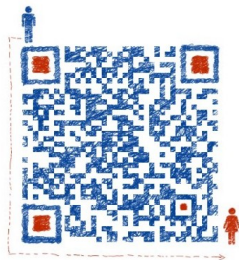
算法二

算法三

算法四

算法五

算法六？



图：My Wechat

- 对于 5% 的数据, $m = 1$

- 对于 5% 的数据, $m = 1$
- 函数 $f: x \mapsto a + bx$, 分开考虑。
- $Q(f) = Q(a + bx) = a \cdot Q(1) + b \cdot Q(x)$
- 由二项式定理, $Q(1) = 1$ 。
- 由题目第二段, $Q(x) = nx$ 。
- 所以 $Q(f) = a + bnx$ 。

为啥 $Q(x) = nx$?

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
 = & \sum_{k=0}^n k \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} \\
 = & \sum_{k=0}^n \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} \\
 = & n \sum_{k=0}^n \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} \\
 = & nx \sum_{k=0}^n \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k} \\
 = & nx \cdot Q(1) = nx
 \end{aligned}$$

为啥 $Q(x) = nx$?

- 的确有“母函数求导”这种方法可以搞，因为我第一次做的时候就用那个方法。
- 我真的忘记了我是怎么做的了 qaq

① 试题大意

② 得分情况

③ 解题思路

④ 算法介绍

算法一

算法二

算法三

算法四

算法五

算法六？



图：My Wechat

- 对于 10% 的数据, $m = 2$
- 对于 5% 的数据, $m = 3$

- 对于 10% 的数据, $m = 2$
- 对于 5% 的数据, $m = 3$
- 暴力找规律, $m = 2$ 的答案在前面。
- 不找规律怎么做呢?

① 试题大意

② 得分情况

③ 解题思路

④ 算法介绍

算法一

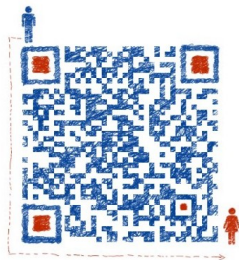
算法二

算法三

算法四

算法五

算法六？



图：My Wechat

- $Q(x^2)$ 怎么求？

- $Q(x^2)$ 怎么求？我真不会直接搞
- $Q(x^2 - x)$ 怎么求？

- $Q(x^2)$ 怎么求？我真不会直接搞
- $Q(x^2 - x)$ 怎么求？这个很好求啊 $\sim x^2 - x = x(x - 1) = x^2$
- 仿照刚才的思路，把组合数拆开，下降幂塞进去就好了。
- 你看出题人多良心，题目塞满了提示，塞满了部分分。（然而各位大爷们似乎一个个都直接~~干~~过去了）
- 身败名裂

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ = & \sum_{k=0}^n n(n-1) \binom{n-2}{k-2} x^k (1-x)^{n-k} \\ = & n^2 x^2 \sum_{k=0}^n \binom{n-2}{k-2} x^{k-2} (1-x)^{n-k} \\ = & n^2 x^2 \cdot Q(1) = n^2 x^2 \end{aligned}$$

同理有

$$Q(x^c) = n^c x^c$$

- 现在问题转化为：将多项式函数 f 表示成下降幂的形式。即求出 $d_0, d_1, \dots, d_m, s.t.$

$$\sum_{k=0}^m c_k x^k = \sum_{k=0}^m d_k x^k$$

- 假设求完了 d_k ，那么统计答案的时候花 $O(m)$ 的时间扫一遍就好了。
- 其实 c_k 也不是给好的。题目中给出了 $f(0..m)$ 具体的值。

- 定义差分运算： $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$ ，可以理解为离散求导。
- 由组合数的定义

$$\Delta \left(\binom{x}{k} \right) = \binom{x}{k-1}$$

- 设 $b_k = k!d_k$ ，则

$$f(x) = b_m \binom{x}{m} + b_{m-1} \binom{x}{m-1} + \cdots + b_1 \binom{x}{1} + b_0 \binom{x}{0}$$

$$\Delta f(x) = b_m \binom{x}{m-1} + b_{m-1} \binom{x}{m-2} + \cdots + b_1 \binom{x}{0}$$

$$\Delta f(0) = b_1$$

$$\Delta^2 f(x) = b_m \binom{x}{m-2} + b_{m-1} \binom{x}{m-3} + \cdots + b_2 \binom{x}{0}$$

$$\Delta^2 f(0) = b_2$$

$$\vdots$$

$$\Delta^k f(0) = b_k$$

$$c_k = k! \Delta^k f(0)$$

举个栗子

- $f(x) = x^3$

x	0	1	2	3
$\Delta^0 f$	0	1	8	27
$\Delta^1 f$	1	7	19	
$\Delta^2 f$	6	12		
$\Delta^3 f$	6			

-

$$x^3 = 6 \binom{x}{3} + 6 \binom{x}{2} + 1 \binom{x}{1} + 0 \binom{x}{0}$$

① 试题大意

② 得分情况

③ 解题思路

④ 算法介绍

算法一

算法二

算法三

算法四

算法五

算法六？



图：My Wechat

- 验题人是用斯特林数做的。由于做法太过奇怪所以就被我强行卡掉了
- m 其实是可以更大的。至少 $10w$ 没问题。
- 就是加一个 FFT 优化咯。->(Ask 汪乐平/叶珈宁/袁宇韬/徐泽涛/丁力煌/吕欣) (6/8 计划通)
- 考虑到这是第一题所以就没加咯。
- 出题人比较懒就只写了平方算法……(听说有人平方被卡？怪我咯)
- myy 15min 怒 A orz

算法六？

```
int n, m, x;
int f[maxm + 5];

int d[maxm + 5];

int main()
{
#ifdef matthew99
    freopen("input.txt", "r", stdin);
    freopen("output.txt", "w", stdout);
#endif

    scanf("%d%d%d", &n, &m, &x);
    REP(i, 0, m + 1) scanf("%d", f + i);
    int ans = 0;
    int now = 1;
    REP(i, 0, m + 1)
    {
        (ans += (LL)f[0] * now % Mod) %= Mod;
        REP(j, 0, m - i) (f[j] = f[j + 1] - f[j]) %= Mod;
        now = (LL)now * x % Mod;
        now = (LL)now * (n - i) % Mod;
        now = (LL)now * fpm(i + 1, Mod - 2, Mod) % Mod;
    }
    (ans += Mod) %= Mod;
    printf("%d\n", ans);
    return 0;
}
```

- 达成成就：在清华集训出过题 ~
- Thanks for listening!